تطوّر مفهوم العدد عند علماء العرب والمسلمين

بالاعتماد خاصة على كتاب الحصّار(البيان والاعتبار في علم مسائل الغبار) و (كشف الجلباب عن علم الحساب) للقلصادي

الأستاذ الدكتور محمد سويسي

ستكون لنا، فيما يلي، جولة بين مخطوطات الحساب العربية من القرون الأولى التي أكبّ فيها العرب على كتب الأقدمين واهتمّوا بعلم العدد، وسنقف، أثناء هذه الجولة، على تطوّر نظرتهم إلى هذا العلم وتصوّرهم له وتعريفهم لأصوله.

ففي القرن الرابع للهجرة يقول إخوان الصفاء في رسالتهم الأولى في القسم الرّياضي المخصّصة للعدد: «كلّ ما لا ينقسم فهو واحد من تلك الجهة التي بها لا ينقسم، وأما الكثرة فهي جملة الآحاد؛ وإن شئت قلت: الواحد ما ليس فيه غيره بما هو واحد. والواحد الذي قبل الاثنين، هو أصل العدد ومبدؤه ومنه ينشأ العدد كلّه، صحيحه وكسره، وإليه ينحلّ راجعًا، أمّا نشوء الصحيح فبالتّزايد، وأما الكسور فبالتّجزؤ... ».

ويشمل مراتب العدد كلّها اثنتا عشرة لفظة بسيطة، وذلك من واحد إلى عشرة، عشرة ألفاظ ولفظة مئة ولفظة ألف (ص ٢٦).

ويقولون في صفحة (٣٠): «ومن خاصية الاثنين أنه أوّل العدد مطلقًا» وفي القولين تناقض.

وفي القرن العاشر الهجري يقول بهاء الدين العاملي (١٥٤٧- ١٦٢٢م) (٩٥٣- ١٠٣١هـ(في كتابه [خلاصة الحساب] (ط. ١٩٧٦، ص٢):

«والعدد قيل كمية تطلق على الواحد وما تألّف منه **ويدخل فيه الواحد**، وقيل نصف مجموع حاشيتيه، **فيخرج**، **وقد يُتكلّف لإدراجه** بشمول الحاشية الكسر. **والحق أنّه ليس بعدد**، وإن تألّف منه الأعداد، كما أنّ الجوهر الفرد عند مثبتيه ليس بجسم، وإن تألف منه الأجسام».

وفي القرن الثاني عشر للميلاد، يقول محمد بن عبد الله بن عيّاش الحصّار، أبو بكر، المغربي في كتابه [البيان والتذكار لعلم مسائل حروف الغبار]: «الواحد العددي بذاته **ليس من العدد**، لأنّه **علّة العدد**، والعدد معلول له، وليست العلّة من المعلول، **فالواحد إذن ليس من العدد**».

ويقول (في الورقة ٢): «اعلم أن أسماء العدد اثنا عشر اسمًا أولها **العدد الواحد** الذي هو أصل العدد ومبدؤه ومنشؤه، ثم زيد على الواحد واحد فصار ذلك **اثنين**، **وهو أوّل العدد لأنّ الواحد ليس عددًا**».

وفي ذلك عين التناقض الذي أشرنا إليه سابقًا. ويقول شرف الدين محمد بن محمد المسعودي الخراساني، في شرح مختصر أبي شجاع البسطامي: «والحسّاب، كما أطلقوا اسم العدد على الكثرة المجتمعة من الآحاد، أطلقوه أيضًا على الواحد وعلى أجزائه، فقالوا: والعدد يقسم إلى صحيح وكسر». (ص ٢ من اللمعة المارديني، في شرح الياسمينية، ط. الكويت ١٩٨٣). ويضيف المارديني: «وهذ الذي يريده الجبريون أيضًا، باعتبارٍ أوّل من حيث هو مصرّح باسمه بقطع النظر من أمرٍ آخر، فسمّوه **عددًا مطلقًا** لأنّ اسمه حينئذ حقيقي، لا يتوقف تعقله في الذهن على تعقل أمر آخر، ولا يتقيّد بشيء، ويطلق على الواحد والآحاد والصحيح والكسر».

ويستنتج ابن غازي (في بغية الطّلاب في شرح منية الحسّاب، ط. حلب ١٩٨٣، ص ٨): أنه: «إن أخذ العدد في التعريف غير مضاف فهو صحيح، وإن أخذ مضافًا فهو كسر، فتقسيمه هذا إنما هو تقسيم عرضي للعدد لا ذاتيّ له» ويضيف أنّ في [رفع الحجاب] (لابن البنّاء المرّاكشي) «مزيد تحرير يتبين لك به أنّ حكاية الخلاف في عددية الواحد على الإطلاق ليس بتحقيق» ثم يحوصل القول ذاكرا: «أنه مهما عرضت للواحد الكثرة أو أخذ في مادّة فهو عدد، وإن لم تعرض له كثرة بوجه من الوجوه، ولاأُخِذَ في مادة فليس بعدد».

يقول ابن البنّاء في [رفع الحجاب]: «والواحد إذا اعتبر من حيث هو مؤلّف من آحاد، كما تقول في خمسة عشر هي ضرب خمسة في ثلاثة، فكل واحد من الثلاثة خمسة، وكل واحد من الخمسة ثلاثة؛ ولأنّ كلّ عدد فهو عدد واحد (فالواحد) مؤلّف من آحاد، وهو بهذا الاعتبار، عدد وبه كانت مرتبة الآحاد تسعة أعداد لا ثمانية، وأسماء الأعداد البسيطة اثني عشر لا أحد عشر، وإذا اعتبر من جهة اتّحاده وانفراده من غير أن يكون هناك اعتبار طبيعة أخرى، فهو نفس الوِحدة التي هي مبدأ العدد، أعني التي إذا أضيف إليها غيرها صار مجموعها عددًا فيكون **الواحد ليس من العدد، وكل عدد واحد،** وليس كل واحد عددًا».

فكما شاهدنا إنّ النِّقاش في موضوع وحدوية الواحد قد طال، ولم يكن هذا النقاش مجرّد جدل فلسفي، بل كان يسعى إلى زيادة التّحرير في تصوّر العدد والتقدّم في تطوّر نظرية العدد.

وذلك أنّ العرب، في البداية، نقلوا عن اليونان حدّهم للعدد بكونه «نصف مجموع حاشيتيه».

فإذا كانت ثلاثة أعداد متتالية في سلسلة الأعداد الصحيحة الطبيعية، أ ،ب ، ج ، فإن $ب = \frac{أ + ج}{2}$

فما لم يتمّ للعرب نقل الصفر عن الهندية لم يكن للواحد حاشية صغرى؛ ويكون الواحد، بهذا الاعتبار، ليس من العدد.

ولما تمّ نقل الصفر [وإن لم يكن في البداية سوى رمز جعلوه «علامة الخلا»] انتظمت مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية في صورة ، 0 ,1 ,2....

بلا نهاية، بالغًا ما بلغ وصار الواحد $1 = \frac{2+0}{2}$ ، أي انطبق عليه تعريف العدد (واتّسع البحث إلى تصوّر مفهوم اللانهاية). وانطبقت عمليات الحساب السابقة على العدد (واحد).

فمن ذلك أن الضرب قد حدّد بكونه «عملية يجمع فيها أعداد مساوية للمضروب بعدّة ما في المضروب فيه من آحاد».

فإذا ما طبّق التعريف على عدد الواحد نتج ما يلي:

أ× 1 (مرة واحدة) = أ

1× أ =1+1+....+1 (أ مرات) = أ

1= 1×1

وكان الواحد **عددًا** له خاصّية ذاتية سمّي فيها (بعنصر الحياد) في عملية الضرب.

ولكن الصورة $1 = \frac{2+0}{2}$ لم يقتصر فيها على اعتبار الصفر كما عرّفه ابن الياسمين. وجعلوا الصفر علامة الخلاء، وهو مدوّر كحلقة، بل قد استعمل، من جهة، للمحافظة على منزلته في العدد. وبذلك ميّزوا بين

العددين 21 و 201 ومن جهة أخرى قد استعمل كعامل ضرب ميّزوا به بين الكتابتين 21 و 210

أو بصفة عامة وبالكتابة الرّمزية أ× 10= $\overline{0\ أ}$

واستنتج القلصادي من ذلك قواعد مهمة تساعد على الحساب الذهني وتيسّر نتائجه:

مثلاً: إذا كان أ عددًا زوجيًا بحيث: أ= 2 ن ⟸ أ× 5=$\overline{0ن}$

أ× 15 = 20 ن + $\overline{0\ ن}$

= $\overline{30\ ن}$

وإذا كان أ عددًا فرديًا: أ = 2ن + 1

⟸ أ×15 = $\overline{30\ ن}$ + 10 + 5

= $\overline{0(3ن+1)}$ + 5

مثاله: 13× 15 = $\overline{0(3×6+1)}$ + 5

= $\overline{190}$ + 5

= 195

وبصفة عامة أ× 100= $\overline{00\ أ}$

أ× 9 = $\overline{0\ أ}$ – أ

أ× 99 = $\overline{00\ أ}$ – أ

أ× 11 = $\overline{0\ أ}$ + أ

يقول القلصادي في «كشف الجلباب عن علم الحساب»: «وكل عدد تضرب في أحد عشر، فضع تحته مثله ولتكن آحاد الأسفل تحت عشرات الأعلى واجمعهما فقط ».

ومثال من ذلك: إذا قيل لك اضرب ستة عشر في أحد عشر فضع الستة عشر في سطر وضع تحتها مثلها ولتكن الستة تحت العشرة والعشرة بعد ذلك هكذا: 16
16

ثم اجمعهما يكن المطلوب وذلك ستة وسبعون ومئة 176.

ومن الملاحظ، عند التصفح لكتاب الحصّار: «البيان والتذكار في علم مسائل الغبار» وكُتب القلصادي من بعده، أننا لا نجد التصريح بكون الصفر عددًا؛ بل بقي، على العموم، اعتباره «علامة للخلا» أو عامل ضرب في عشرة.

هذا على أننا نجد ضمن خوارزميات الحصّار والقلصادي للعمليات الحسابية من جمع وطرح وغيرهما ما نقف به على معاملتهما للصفر معاملة العدد.

فيقول القلصادي في «كشف الجلباب»: «إذا كان في المجموعَيْن صفر أو أصفار فاجمع العدد إلى العدد وضع الصّفر إن كان في المنزلتين لحفظ المرتبة».

ويأخذ لذلك مثلاً جمع أربعمئة 400 إلى ثلاثة ومئتين 203 هكذا يقول: «ثم اجمع الثلاثة إلى الصفر تكن ثلاثة ضعها أول المرتبة، ثم

$$\begin{array}{r} 603 \\ 400 \\ 203 \end{array}$$

اجمع الصفر إلى الصفر يكن صفرًا لا غير فتضعه في مرتبة العشرات، ثم اجمع الاثنين إلى الأربعة تكن ستة ضعها على رأس المجموعَيْن، فيكون الخارج ثلاثة وستمئة 603».

وللتأكيد على هذا العمل الذي يبدو جديدًا يعدّد القلصادي الأمثلة:

1040+5203، 502+320، 5300+3021

وفي الخلاصة إنه تمّ اعتبار الصفر، في عملية الجمع والطرح اعتبار العدد كما يلي:

أ + 0 = أ

0+ أ = أ

0 = 0 +0

الأمر الذي لخّص فيما بعد فقيل: «إنّ الصفر هو عنصر الحياد في عملية الجمع».

وتبعًا لذلك عُومل الصفر في عملية الضرب، معاملة العدد (حسب تحديد الضرب بكونه عملية يعرف بها مجموع عدّة من الأعداد المساوية للمضروب بعدد ما يكون في المضروب فيه من الآحاد).

أ × 0 = مجموع صفر من الأعداد مساوية لـ (أ) أي 0.

0 × أ= 0 + 0 + ... +0 (أ مَرّات) = 0

0 = 0 × 0

وهكذا توجّه الفكر تدريجيًا إلى اعتبار الصفر عددًا. وبذلك (حسب الحدّ العام للعدد) ستلاحظ المعادلة الآتية:

س 0 1 2... $\Longleftarrow$ $\frac{1+س}{2}$ = 0

وسينطلق البحث عن عدد يمثّل الحاشية اليمنى (الصغرى) للصفر. ويبشر باكتشاف مجموعة جديدة من الأعداد: مجموعة الأعداد النسبية[1] Z .

وبعد هذه الملاحظات العامة السريعة حول تطوّر مفهوم العدد عند علماء العرب والمسلمين سنعرض لوحات من خوارزميات أعمال الحساب المستمدّة من كتاب الحصّار ومن مصنفات القلصادي.

[كشف الجلباب عن علم الحساب]

للقلصادي

[البيان والاعتبار في علم مسائل الغبار]

للحصّار:

I– الجمع:

١) الحالة الأولى: مجموع الرقمين لا يفوق 10

67	655	9968
22	534	7635
45	121	2333

٢) تشتمل الأعداد على أصفار

603	822	6243
400	320	5203
203	502	1040

ملاحظة: أ + 0 = أ 0+ أ = أ 0+ 0= 0 =0

0 عنصر الحياد في عملية الجمع.

٣) مجموع الرقمين أصغر أو أكبر أو يساوي 10

---

(١) Z هي، في مصطلحات الرياضيات في التعليم العالي في سورية: «حلقة الأعداد الصحيحة». ينظر معجم الرياضيات المعاصرة للأساتذة صلاح أحمد وموفق دعبول وإلهام حمصي – نشرته مؤسسة الرسالة بدمشق في عام ١٩٨٣.

100	1000	10000
24	452	6432
76	548	2343
1	11	1225
		111

1423	1572	136192
746	974	78764
677	598	57428
11	11	11 1

II– الطّرح **أ – ب**

١) أرقام ب أصغر من أرقام أ في عين المنزلة:

24	223	23313
67	746	57948
43	523	34635

٢) بعض الأرقام في ب (ماعدا المنزلة الأخيرة) أكبر من مقابليها في أ:

43	057	0062
71	235	1000
28	178	0938
1	11	111

III– الضرب **أ× ب**

أ و ب ذوا رقمين:

32 ×14 23 × 64

448
8
2
12
3 32
1 4

٢) أ (رقمان)

72 ×592

42624
4
18
10
14
63
35 72
59 2

ب (٣ أرقام)

1472
12
18
8
12 23
6 4